

Анализа преносних функција аналогних филтара употребом програмског језика Python

Миљана Милић и Ванчо Литовски

Апстракт— Филтри сигнала су један од најраспрострањених подсистема телекомуникационих и електронских система. У обради сигнала филтар је подсистем који има задатак да из спектра сигнала потисне нежељене компоненте независно од њиховог порекла. У овом раду представљен је развој интерактивног софтверског пакета који служи за анализу преносних функција филтара при чему се ту подразумева израчунавање и графичко представљање модула, фазе и групног кашњења у фреквенцијском домену, као и временског одзива на импулсну и одскочну функцију. При томе ће бити екстараховни и најважнији параметри фреквенцијског и временског одзива како би се генерисала и квантитативна слика о перформансама функције која се анализира. У овом раду биће дати резултати који се односе на анализу преносних функција аналогних филтара при чему ће се као улазни подаци прихватати полови и нуле функције. Као софтверска платформа коришћен је језик Python који подржава објектно-оријентисани и функционални стил програмирања.

Кључне речи—Analogni filtri, prenosne funkcije, analiza.

I. УВОД

Филтрирање сигнала представља неизоставни поступак у обради података сваког савременог уређаја. Задатак филтара је да из спектра сигнала потисне нежељене компоненте независно од њиховог порекла.

Преносна функција филтара је најчешће дефинисана у домену комплексних фреквенција. Када се ради о обради аналогних сигнала то је s-домен, а када се ради са дигиталним сигналимa то је z-домен.

Наша је намера да развијемо интерактивни софтверски пакет који ће служити за анализу преносних функција филтара при чему се ту подразумева израчунавање и графичко представљање модула, фазе и групног кашњења у фреквенцијском домену, као и временског одзива на импулсну и одскочну функцију. При томе ће бити екстараховни и најважнији параметри фреквенцијског и временског одзива како би се генерисала и квантитативна слика о перформансама функције која се анализира. У

Миљана Милић – Електронски факултет, Универзитет у Нишу, Александра Медведева 14, 18000 Ниш, Србија (e-mail: miljana.milic@elfak.ni.ac.rs).

Ванчо Литовски – Електронски факултет, Универзитет у Нишу, Александра Медведева 14, 18000 Ниш, Србија (e-mail: vanco.litovski@elfak.ni.ac.rs).

овом раду биће дати резултати који се односе на анализу преносних функција аналогних филтара при чему ће се као улазни подаци прихватати полови и нуле функције.

Као софтверска платформа биће коришћен језик Python који подржава, у првом реду императивни, објектно-оријентисани и функционални стил програмирања. Програми писани у Python језику се најчешће интерпретирају. Уз интерпретер се обично испоручује и веома развијена стандардна библиотека модула. Поред наведених особина овог програмског језика, један од важних разлога за његов избор јесте његова компатибилност са C++ платформом као и са системом за пројектовање софтверског радиa ГНУ.

У раду ће најпре бити дате основе теоријске анализе аналогних филтара, као и формуле за израчунавање њихових особина. Потом ће бити описане најважније карактеристике развојног окружења, са свим неопходним пакетима. Након тога следи опис развијене апликације, а затим приказ резултата анализе и закључак.

II. ПРЕНОСНЕ ФУНКЦИЈЕ ФИЛТАРА

Електрични сигнални филтри којима се ми бавимо су линеарна пасивна и активна кола. Они задовољавају услове каузалности и стабилности. Њихове преносне функције се исказују као рационалне функције два полинома при чему је ред бројиоца m мањи или једнак реду имениоца n .

У овом одељку даћемо основне дефиниције везане за преносне функције сигналних филтара као и формуле за израчунавање карактеристика које се из њих екстрахују. Биће обухваћена анализа у фреквенцијском и временском домену. С обзиром да се одзив у временском домену може да израчуна само на основу рачуна остатака за ову анализу неопходно је познавати половине преносне функције. Исто важи и за израчунавање групног кашњења, а нешто слично важи и за израчунавање фазне карактеристике. Наиме израчунавање фазне карактеристике на основу познатих коефицијената полинома у преносној функцији може да доведе до погрешних резултата. Зато ће се у наредним излагањима користити формуле које су засноване само на нулама и половима преносне функције. Подразумева се да, када су дати коефицијенти, најпре су полиноми бројиоца и имениоца решени.

Преносна функција у s-равни исказана је у факторизованом облику као:

$$T(s) = T_0 \cdot \frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (1)$$

Овде је s комплексна кружна фреквенција: $s = \sigma + j\omega$. Имагинарни део $\omega = \text{Im}\{s\}$ назива се стварна кружна фреквенција: $\omega = 2\pi f$, где је f стварна фреквенција исказана у Hz. Нуле преносне функције (или, нуле преноса) су $z_k = \alpha_k + j\beta_k$, $k=1, 2, \dots, m$, а полови су $p_i = \gamma_i + j\delta_i$, $i=1, 2, \dots, n$. n је ред филтра и $n \geq m$. Величина

$$T(0) = T_0 \cdot \frac{\prod_{k=1}^m (-z_k)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)} \quad (2)$$

је вредност преноса (појачање) на нултој кружној фреквенцији, а величина

$$T(j1) = T_0 \cdot \frac{\prod_{k=1}^m (j1 - z_k)}{\prod_{i=1}^n (j1 - p_i)} \quad (3)$$

је вредност преноса на јединичној кружној фреквенцији. Пошто се кружна фреквенција обично нормализује тако да је $\omega_{\text{критично}} = 1$, (За нископропусне филтре то је обично горња гранична фреквенција пропусног опсега, а за филтре пропуснике опсега фреквенција то је централна фреквенција пропусног опсега) вредност исказана са (3) је често од велике важности.

На оси стварних фреквенција односно за $s = j\omega$, амплитудска карактеристика се израчунава као

$$|T(s)|_{s=j\omega} = \left[T(s)T(-s)|_{s=j\omega} \right]^{1/2} \quad (4)$$

или

$$|T(s)|_{s=j\omega} = |T_0| \frac{\prod_{k=1}^m \left[\alpha_k^2 + (\omega - \beta_k)^2 \right]^{1/2}}{\prod_{i=1}^n \left[\gamma_i^2 + (\omega - \delta_i)^2 \right]^{1/2}} \quad (5)$$

Амплитудска карактеристика се исказује у полулогаритмској размери као

$$A(\omega) = 20 \cdot \log \left\{ |T(s)|_{s=j\omega} \right\} \quad [\text{dB}], \quad (6)$$

а слабљење као

$$a(\omega) = 20 \cdot \log \left\{ \frac{1}{|T(s)|_{s=j\omega}} \right\} \quad [\text{dB}] \quad (7)$$

Врло је важно да се фазна карактеристика израчунава из израза

$$\varphi(\omega) = \arg \left\{ T(s)|_{s=j\omega} \right\} = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{T(s)}{T(-s)} \right]_{s=j\omega} \quad (8)$$

односно

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^m \arctg \left[\frac{\beta_k - \omega}{\alpha_k} \right] - \sum_{i=1}^n \arctg \left[\frac{\delta_i - \omega}{\gamma_i} \right] \quad (9)$$

При израчунавању \arctg функције, за сваку вредност кружне фреквенције, најпре треба на основу знака бројиоца и знака имениоца утврдити у ком се квадранту налази угао, а тек онда га одредити. На пример, ако су и бројилац и именилац негативни, налазимо се у трећем квадранту па се аркустангенс рачуна као

$$\pi + \arctg \left(\frac{\text{brojilac}}{\text{imenilac}} \right) \quad (10)$$

Групно кашњење се рачуна по формули

$$\tau(\omega) = - \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + (\omega - \beta_k)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\gamma_i^2 + (\omega - \delta_i)^2} \quad (11)$$

Општи облик временског одзива на импулсну функцију дат је у следећим изразом

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(q-1)!} \left\{ \frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}} \left[(s - p_i)^q T(s) e^{st} \right] \right\} \quad (12a)$$

где је q пола. Ако су полови прости може да се користи

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \left(\lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ (s - p_i) \cdot T(s) \cdot e^{st} \right\} \right) \quad (12b)$$

Ако се ова функција развије односно ако се замени (1), настаје

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ T_0 \frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{r=1}^n (s - p_r)} e^{st} \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ T_0 \frac{\prod_{k=1}^m (p_i - z_k)}{\prod_{r=1}^n (p_i - p_r)} [\cos(\delta_i t) + j \cdot \sin(\delta_i t)] e^{\gamma_i t} \right\} \quad (13)$$

Одзив на одскочну функцију добија се када се скуп полова прошири са полом у нули. Нова функција чија се инверзна Laplace-ова трансформација тражи била би

$$T_0 \frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (14)$$

У (13) сума се повећава за један, а скуп полова се проширује са: $p_{n+1}=0+j0$.

III ПРИМЕНА У ПРОГРАМСКОМ ОКРУЖЕЊУ PYTHON

Python је програмски језик који је развијен у складу са OSI (Open Systems Interconnection) стандардима. Лиценца за овај програмски језик је отворена (Open source) и он може слободно да се користи и дистрибуира, чак и у коменцијалне сврхе. Постоји на стотине програмских модула и пакета за Python, како у виду стандардних библиотeka, тако и оних креираних од стране специјализованих група (communities) [4], [5].

За развој наше Python апликације, коришћено је Eclipse развојно окружење [6]. Главни разлози за његов избор су његова доступност, отвореност, али и олакшан развој и дебагирање програма. За развој графичког интерфејса апликације, коришћен је стандардни Python-ов GUI пакет Tkinter [7].

За развој апликације за анализу аналогних филтара, било је неопходно користити још два Python-ова пакета. Први је омогућавао коришћење појединих математичких функција и операција Numpy (Numerical Python) [8], док је други омогућавао графичко приказивање резултата израчунавања у виду графика - Matplotlib [9].

Следи кратак опис апликације и упутство за њено коришћење.

IV АНАЛИЗА ФИЛТАРА PYTHON АПЛИКАЦИЈОМ

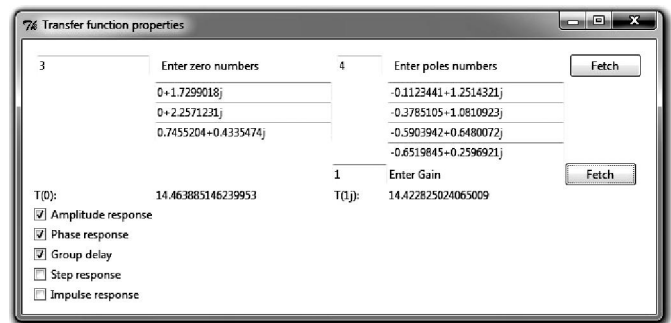
Када се покрене апликација Transfer function properties, најпре се од корисника тражи да унесе број нула преносне функције филтра, као и број њених полова. Ово је приказано на слици 1. Након притиска тастера Fetch, прозор апликације се проширује, како би се у њу унеле просте нуле и полови функције, као и иницијално појачање филтра. Ово је приказано на слици 2.



Сл. 1. Отварање апликације – унос броја полова и нула

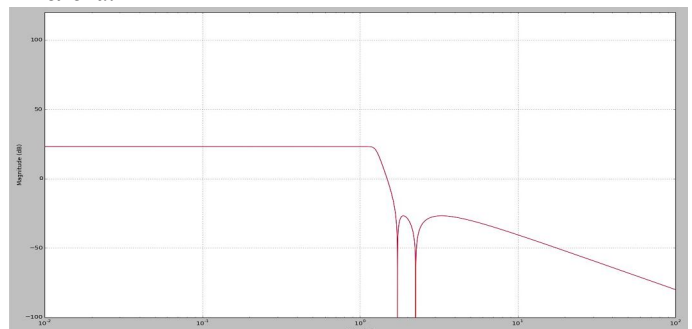
Када се отвори проширени прозор, у њега треба унети просте нуле и полове филтра. Затим је потребно изабрати једну или више анализа. Као што се са слике 2 види, могуће је графички приказати: амплитудску карактеристику филтра, фазну карактеристику,

карактеристику групног кашњења, импулсни одзив у временском домену, као и одзив филтра на одскачну функцију. Притиском на тастер Fetch, поред изабраних графичких приказа карактеристика филтра, у прозору апликације се исписују и вредности преносне функције $T(0)$ и $T(j1)$.

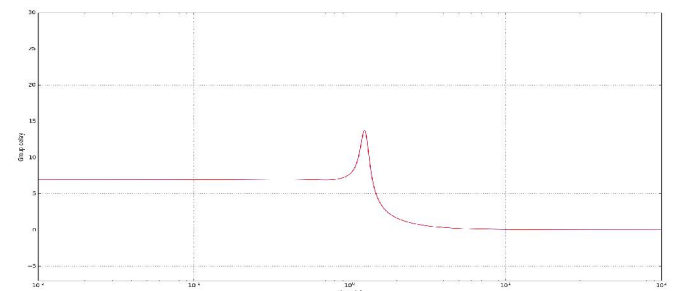


Сл. 2. Проширени прозор за унос нула и полова и задавање циљева анализе

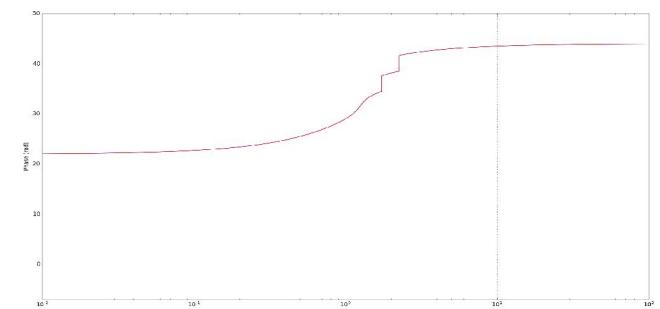
На сликама 3, 4, 5 и 6, приказани су резултати анализе једног аналогног филтра који има различите типове нула и полова.



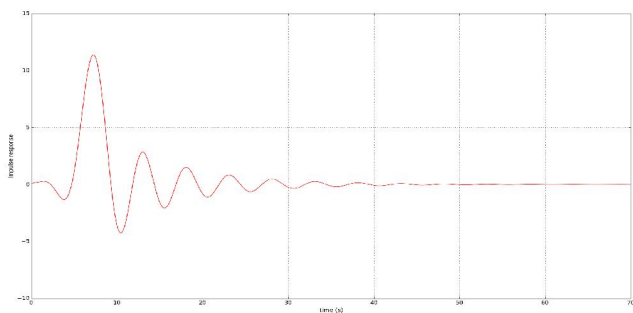
Сл. 3. Амплитудска карактеристика филтра



Сл. 4. Фазна карактеристика филтра



Сл. 5. Карактеристика групног кашњења филтра



Сл. 6. Импулсни одзив филтра – временски домен

У ЗАКЉУЧАК

У раду је приказан развој апликације за анализу аналогних филтара који су описани нулама и половима преноса, као и појачањем. Развијена апликација успешно обавља наведене анализе. Свесни смо тога да многи комерцијални алати подржавају слична израчунавања и анализе. Међутим, овде се као један од главних предности наметнула доступност програмског језика Python, а самим тим и отвореност и доступност развијене апликације. Даља истраживања и развој апликације биће усмерена ка имплементацији израчунавања додатних карактеристика филтара, као и додатних контрола у самој апликацији.

ЗАХВАЛНИЦА

Ова истраживања су била делимично финансирана од стране Министарства Просвете, Науке и Технолошког развоја Републике Србије у оквиру уговора TP32004.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lutovac, M.D., Tošić, D.V., Evans, B.L., *Filter Design for Signal Processing Using MATLAB and Mathematica*, Prentice Hall, NJ, 2001, ISBN 0201361302.

- [2] Humpherys, DeVerl S., *The Analysis, design, and synthesis of electrical filters*, Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1970.
 [3] Litovski, V., Zwolinski, M., *VLSI Circuit Simulation and Optimization*, Chapman and Hall, London, 1997.
 [4] www.python.org
 [5] www.pydev.org
 [6] www.eclipse.org
 [7] <https://wiki.python.org/moin/Tkinter>
 [8] www.numpy.org
 [9] www.matplotlib.org

ABSTRACT

Filters are the most often telecommunication and electronic subsystems. In the signal processing, filters represent a subsystem whose purpose is to suppress the unwanted spectrum components, regardless of their origins. A development of the interactive software application for analogue filters' transfer function analysis is presented in this paper. It performs calculative and also graphical representation of the filter's characteristics such as: module, phase and group delay in the frequency domain, and also impulse and step response of the filter in the time domain. Most important frequency and time response parameters will be extracted for each filter in order to have a quantitative presentation of the function that's being analyzed. This paper presents the results related to the analysis of the analog filter transfer function while accepting poles and zeros of the function as inputs. As a software platform, a Python programming language is used, since it supports both object-oriented and functional programming style.

Analysis of analog filters' transfer function using Python programming language

Miljana Milić and Vančo Litovski